10.1 数值数字的分布 2020年7月9日09点57分

我们考虑以为底的实数展开,其中是一个固定整数.设是相加为的“比例”,即且.令为在的集合,其中的基数为,其扩展以比例包含数字.更准确地说,如果表示数字在的以为底的扩展的前个位置中出现的次数,则

因此,我们将视为一组基数为2,数字1的比例为“三分之二”，数字0的比例为“三分之一”的数值.

众所周知,几乎所有的数字(按照勒贝格测度)都正交于所有的基数.也就是说,它们以基数的展开以等比例包含所有的数字.用我们的符号表示,的勒贝格度量为1,因此所有m的维数均为1.矛盾的是,尽管几乎所有数字对于所有基都是正交的，但从未展示过该数字的具体例子.当不均等时,我们可以使用Hausdorff维数来描述集合的大小.(这些集合在中是密集的,因此盒维度为1.)

在以下证明中使用了质量分布技术–质量分布自然地作为概率度量.

命题10.1 根据如上所述的,

本节初学评分:2分

10.2 连续分数 2020年7月9日10点58分

除了可以使用以基展开定义数字集之外,我们还可以使用连续的分数扩展.任何不是整数的都可以写成

其中是整数,并且.类似地,如果不是整数,则

且,因此

继续这种方式,

对于每个,在任何阶段都不是整数.我们将整数序列称为的偏商[partial quotients]并写作

x的连续分数展开.当且仅当x是有理数时,该展开才会终止,否则采用有限数量的项提供x的有理逼近序列,当时收敛到x.(从某种意义上讲,这些近似值是最好的,并且与丢丢丁近似值理论密切相关;请参见第10.3节.)

连续分数的示例包括

本节初学评分:3分

10.3 丢番图近似 2020年7月9日11点32分

给定的无理数可以用分母不大于的有理数近似吗?丢番图近似是对此类问题的研究，在相当实际的情况下这些问题可能会出现（请参阅第13.6节）.Dirichlet的一个经典定理（参见练习10.8）指出,对于每个实数x,都有无限多个正整数q,使得

对某些整数p恒成立;这样的是x的“良好”有理近似值.等效地,

对于无限多个,其中表示从到最接近的整数的距离.

Dirichlet结果的变化形式几乎适用于所有x.可以证明,如果是q的递减函数且,则

根据级数是发散还是收敛,几乎所有x或几乎没有x都可以由无限多个满足.在后一种情况下,尽管无穷多个满足(10.3)的一组x的Lebesgue测度为0，但它通常是一个正Hausdorff维数的分形.

我们称数值x使得

对无限多的正整数成立是𝛼-良好近似.很自然地问当时这组数字有多大,实际上,是否确实存在这样的非理性数字.我们证明了Jarník定理,即𝛼良好好近似数集的Hausdorff维数为.

雅尼克定理10.3 假设𝛼>2.令F为实数的集合且不等式

对于无穷多的正整数q成立.则.

命题4 假设𝛼>2.如果F是一组正数,使得对无穷多q成立,则对于所有.

本节初学评分:1分